

деляются во времени и нелинейно распределены по сечению оболочки. Прогнбы со временем возрастают, необратимо формообразуя оболочку вследствие ползучести.

Расчеты проводились с удержанием 10 – ти базисных функций в аппроксимациях прогиба, изгибающего момента и окружной продольной силы вдоль длины оболочки. Сетка для нахождения компонент необратимых деформаций ползучести и параметра повреждаемости выбиралась следующей: 41 точка – вдоль длины оболочки и 9 точек - по толщине.

Расчетами установлено, что с увеличением числа базисных функций и количества точек дискретизации области эти результаты практически не изменяются.

Список литературы: 1. *Сливкер В.И.* Об одной смешанной вариационной постановке задач для упругих систем // МТТ, №4, 1982. – С. 88 - 97. 2. *Розин Л.А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Ленинград, изд.-во ЛГУ, 1978. – 222 с. 3. *Рвачев В.Л.* Теории R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982 – 552с. 4. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2 - е, перераб. и доп. М., “Машиностроение”, 1975. 400 с. 5. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести: Пер. с англ. - М.: Мир, 1986. – 360 с. 6. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. Tech. Mech., 20, (2000). – Р. 215-226. 7. *H. Altenbach, O. Morachkovsky, K. Naumenko, A. Sychov.* Geometrically non-linear bending of thin - walled shells and plates under creep - damage conditions. Arch. Appl. Mech., 67, (1997). – Р. 339 - 352.

Поступила в редакцию 10.07.02

УДК 539.3

О.К.МОРАЧКОВСКИЙ, докт.техн.наук; **А.А.ЗАМУЛА**

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ СТЕРЖНЕЙ И ОБОЛОЧЕК НА БАЗЕ МКЭ И СДВИГОВОЙ ТЕОРИИ

В статті надані постановки задач, методи їхнього розв'язання та результати дослідження з повзучості стержнів та осесиметричних оболонок. Постановки задач повзучості стержнів та оболонок надані на основі МСЕ та теорії зсуву першого порядку відносно переміщень та повного кута повороту перерізу. Надані числові результати, дані із дослідження збіжності чисельних розв'язків в залежності від дискретизації та встановлено закономірності повзучості та пошкодження розглянутих елементів конструкцій.

Тонкостенные элементы конструкций, в частности, стержни и оболочки, сочетают в себе относительную легкость, высокую прочность и жесткость, что объясняет их широкое использование во многих областях техники. В энергетическом, авиационном и химическом машиностроении ответственные элементы машин и конструкции эксплуатируются при высоких температурах и уровнях нагрузок. В этих условиях конструктивные элементы деформиру-

ются при ползучести, сопровождаемой накоплением необратимых деформаций и повреждений [1-3].

В работе даны постановки задач ползучести стержней и осесимметричных оболочек, предложен метод их решения на базе метода конечных элементов. Обсуждаются численные результаты исследований ползучести стержней при поперечном и осевом нагружении и цилиндрической оболочки при осевом растяжении с учетом деформации сдвига.

В данной работе задача ползучести тонких стержней и оболочек вращения решалась на базе метода конечных элементов в сочетании с численным интегрированием уравнений состояния методом Рунге-Куты в модификации Мерсона [3]. При этом на каждом шаге времени отыскивалась точка стационарности вариационного равенства для функционала Лагранжа:

$$\int_V \left(\delta \{ \varepsilon \}^T \{ \sigma \} - \delta \{ u \}^T \{ g \} \right) dV - \int_S \delta \{ u \}^T \{ p \} dS = 0. \quad (1)$$

где векторы деформаций, перемещений и напряжений в точке рассматриваемого тела приняты отвечающими известным тензорным зависимостям общей теории ползучести:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T + c_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}); \quad \forall x \in V; \quad (2)$$

$$u_i = \tilde{u}_i; \quad \forall x \in S_1; \quad u_i(x, 0) = c_{ij}(x, 0) = 0.$$

Здесь кроме обычно принятых обозначений учтено, что C_{ijkl} , α_{ij} – тензоры, которыми определяются свойства термоупругих материалов при известном распределении температуры в теле. Кроме того, обозначено, что \tilde{u}_i – значения перемещений точек, принадлежащих закрепленной поверхности тела S_1 .

Связь деформаций ползучести C_{ij} с компонентами тензора напряжений σ_{ij} принята отвечающей соотношениям теории ползучести типа течения, которые в общей форме представлялись в виде

$$\dot{c}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{c_i(\sigma_e, \omega)}{\sigma_i} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} (\sigma_{ij} \delta_{ij}) \delta_{ij} \right) \\ \dot{\omega} = \Omega(\sigma_e^\omega, \omega), \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t_*) = \omega_*$$

где $c_i(\sigma_e, \omega)$, $\Omega(\sigma_e^\omega, \omega)$ – функции, определяемые по кривым ползучести образцов материала вплоть до разрушения; $\omega(t)$ – параметр повреждаемости; σ_e – эквивалентные напряжения, для которых используется интенсивность Мизеса и максимальные главные напряжения; σ_e^ω – эквивалентные напряжения, принимаемые в теории длительной прочности.

В исследованиях, результаты которых приведены ниже, функции

$c_i(\sigma_e, \omega)$, $\Omega(\sigma_e^\omega, \omega)$ принимались в виде, [1,2]:

$$c_i(\sigma_e, \omega) = \frac{B\sigma_e^{n-1}}{(1-\omega^r)^m}$$

$$\Omega(\sigma_e^\omega, \omega) = \frac{D(\sigma_e^\omega)^k}{(1-\omega^r)^l}, \omega(0) = 0, \omega(t_*) = \omega_*$$
(3)

Дискретизация в равенстве (1) осуществлялась в соответствии со схемой метода конечных элементов, подробно изложенной в работе [4]. Нормальное перемещение и функция сдвига аппроксимированы кубическим полиномом, осевое перемещение – линейной функцией. Использован конечный элемент с десятью степенями свободы, каждой из которых отвечает обобщенная координата – q_i , представляющие узловые неизвестные задачи.

Далее, следуя стандартной схеме метода конечных элементов, получено разрешающее уравнение для каждого момента времени, определяемого при интегрировании зависимостей (3):

$$[K]\{q\} = \{F_c\} + \{F_q\} + \{F\}.$$
(4)

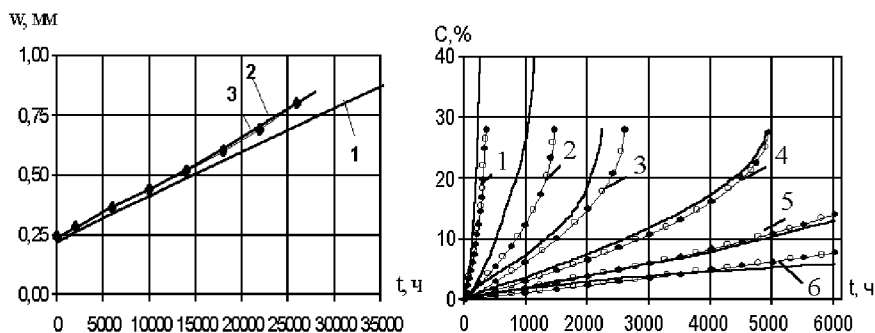
где $[K]$, $\{F_q\}$, $\{F_c\}$ – матрица жесткости системы, векторы приведенных к узлам внешних сил и “фиктивных” сил, обусловленных деформациями ползучести. Вектор $\{F\}$ включает дополнительные сосредоточенные в узлах нагрузки.

Решение производилось в такой последовательности. Уравнения состояния интегрировались методом Рунге-Кутты-Мерсона с автоматическим выбором шага по времени. Элементы матрицы жесткости и векторов сил, включая и силы, соответствующие накопленным к рассматриваемому моменту времени деформациям ползучести, подсчитываются по квадратурным формулам Гаусса.

Ползучесть стержня с жестко закрепленными краями. Рассмотрим результаты расчетов на ползучесть стержня из стали 316 с зашеченными краями. Ранее, такая задача рассматривалась в работе [5], где изучалась ползучесть стержня при поперечном нагружении распределенной равномерно нагрузкой интенсивности $q_0=0,05$ МН/м. Как и в работе [5], значения параметров стержня приняты равными: $l = 1$ м; $h = 0,1$ м; $b = 0,05$ м, а физико-механических постоянных материала: $E = 1,44 \cdot 10^5$ МПа; $G = 5,48 \cdot 10^5$ МПа; $B = 2,13 \cdot 10^{-13}$ МПа $^{-n}$ /ч; $D = 9 \cdot 10^{-10}$ МПа $^{-k}$ /ч; $n = m = 3,5$; $k = p = 2,8$; $r = 1$; $\alpha = 1$.

Расчетные данные в сопоставлении с полученными в [5] представлены на рисунке, слева. Здесь представлено изменение максимальных прогибов стержня со временем в условиях ползучести, полученные с применением различных методов и моделей. Так, на этом рисунке обозначены данные расчетов: 1 – с использованием гипотез Бернулли – Эйлера, 2 – на основе сдвиговой теории первого порядка и параболического распределения касательных

напряжений ($k = 5/6$) [5]; 3 – на основе предложенного в работе метода расчета при 30 КЭ.



Ползучесть стержней и цилиндрических оболочек при растяжении. Далее рассмотрим результаты расчетов на ползучесть стержня и цилиндрической оболочки при осевом растяжении. Расчетные данные сопоставлены с экспериментальными, которые взяты из работы [6]. Для растянутого стержня уравнения состояния ползучести приняты в виде обобщенного закона Нортонa:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{B\sigma^n}{(1-\omega^r)^m} \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{D\sigma^k}{(1-\omega^r)^p}$$

Аналитическое решение этих уравнений имеет следующий вид:

$$\omega(t) = 1 - (1 - D(p+1)\sigma^k t)^{\frac{1}{1+p}}; \qquad (5)$$

$$c(t) = \frac{B}{D} \sigma^{n-k} \frac{1 - (1 - D(p+1)\sigma^k t)^{m+1}}{p - m + 1}.$$

Используя эти зависимости и экспериментальные данные [6], материальные постоянные, входящие в уравнения состояния для Ст20 при температуре $T = 500^\circ\text{C}$ приняты следующими: $B = 3,19 \cdot 10^{-17} \text{ МПа}^{-n}/\text{год}$, $D = 1,78 \cdot 10^{-17} \text{ МПа}^{-k}/\text{ч}$; $n = k = m = 6,12$; $p = 11,51$; $E = 1,643 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

По разработанной в работе методике выполнены расчеты на ползучесть стержня и оболочки при растяжении. В условиях краевой задачи принято, что стержень зашпелен на одном крае и на его другом крае приложена осевая сила. Для оболочки радиусом $R = 0,02 \text{ м}$, толщиной $h = 0,001 \text{ м}$ и длиной $L = 0,1 \text{ м}$ и стержней той же длины и площадью поперечного сечения, что и у оболочки, выполнены расчеты на ползучесть при осевом растяжении. В расчетах принималось, что один край стержня и оболочки неподвижен в осевом направлении и к другому их краю приложено растягивающее усилие.

На рисунке, справа, сопоставлены расчетные данные для стержней – точки, для оболочки – кружки и данные расчета по зависимостям (5) – пунк-

тирные кривые и экспериментальные данные – сплошные кривые, для различных уровней напряжений (МПа): 76,9 – кривая 1, 83 – 2, 90 – 3, 100 – 4, 110 – 5, 140 – 6.

Как видно из сопоставленных на этом рисунке расчетных и экспериментальных данных, результаты расчетов по предложенной в данной работе методике вполне удовлетворительно согласуются с известными в литературе расчетными и экспериментальными данными.

Список литературы: 1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 2. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. – М: Наука. 1974. – 311 с. 3 *Бурлаков А.В., Львов Г.И., Морачковский О.К.* Ползучесть тонких оболочек. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1977. – 123 с. 4. *Рикарде Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зинатне, 1988. 284 с. 5. *Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation models of beams, plates and shells in creep lifetime estimations. Tech. Mech., 20, (2000), P. 215-226. 6. *Кац Ш.Н.* Исследования длительной прочности углеродистых труб // Теплоэнергетика. – 1955. – № 11. – С.37-40.

Поступила в редакцию 09.07.02

УДК 539.3

В.К.НАУМЕНКО, канд.техн.наук; ***К.В.НАУМЕНКО***; ***В.П.ШУЛЬГИН***

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ МАТРИЧНОГО МЕТОДА НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ И МЕТОДА ВАРИАЦИОННЫХ ИТЕРАЦИЙ

У статті показана побудова функцій впливу (функцій Гріна) при вигині прямокутних тонких пластин від зосереджених статичних і кінематичних впливів. В основу побудови математичної моделі цієї задачі покладені ММПП (матричний метод початкових параметрів), МВІ (метод варіаційних ітерацій), метод Рітца. Наведені численні розв'язання двох часткових задач, отримані за допомогою ЕОМ, які узгоджуються з відомими.

Известно [1], что функции влияния построены для немногих тонких пластин (круглая защемленная со всех сторон, бесконечная, полубесконечная пластины и т.п.) и только от действия сосредоточенных сил $F = 1$ или моментов $M = 1$.

В данной работе показано построение функций влияния для прямоугольных пластин на основе ММНП (матричный метод начальных параметров), который дает возможность получить их как от статических ($F = 1$, $M = 1$), так и кинематических ($W = 1$, $\Theta = 1$) воздействий.

Их знание необходимо для определения НДС (напряженно-деформированное состояние) сложных многосвязных пластин с применением МСЭ (метод суперэлементов) в форме метода сил или перемещений, а также МГЭ (метод граничных элементов) для пластин с отверстиями или разрезами.